16 Energie- und Impulserhaltungssatz Abgeschlossenes System

Zwei Autos A und B mit gleichen Massen m bewegen sich zunächst mit gleicher Geschwindigkeit v nebeneinander auf einer Straße. Dann erhöht das Auto A seine Geschwindigkeit auf $2v$.

Für einen Beobachter auf der Straße hat sich die kinetische Energie des Autos A um $\Delta E_1 = \frac{3}{2}mv^2$ erhöht, für den Fahrer des Autos B jedoch nur um $\Delta E_2 = \frac{1}{2}mv^2$. Beide Beobachter würden aber den gleichen Benzinverbrauch registrieren. Stimmt hier der Energiesatz nicht?

Man darf das Auto A nicht isoliert betrachten. Bei dem Beschleunigungsvorgang wird auch die Erde mitbeschleunigt. Dieser Effekt ist zwar klein, aber aufgrund der Masse der Erde nicht vernachlässigbar.

a) *Ruhendes Bezugssystem*

Impulssatz: Vor der Beschleunigung sei die Straße in Ruhe; danach habe sie die Geschwindigkeit u. Die Erde erhält also den Impuls Mu, wenn M die Erdmasse ist.

Bei der Angabe der Impulse der Autos ist zu beachten, daß sich die Geschwindigkeit u zu den relativ zur Straße gemessenen Geschwindigkeiten addiert.

(1) $$mv + mv = m(2v+u) + m(v+u) + Mu \ .$$

Daraus folgt:

(2) $$u = -v\,\frac{m}{M+2m} \ ;$$

u und v sind einander entgegengerichtet. Da $m \ll M$, ergibt sich $|u| \ll |v|$.

Energiesatz: Die Motorenarbeit ist gleich der Änderung der kinetischen Energie des Systems:

(3) $$A = \frac{m}{2}(2v+u)^2 + \frac{m}{2}(v+u)^2 + \frac{M}{2}u^2 - 2\,\frac{m}{2}v^2 \ .$$

Mit $|u| \ll |v|$ erhält man:

(4) $$A = 2mv^2 + \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}u^2 - mv^2$$

(5) $$= \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 \ .$$

Mit (2) ergibt sich weiter:

(6) $$A = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2\left(\frac{m}{M}\right)^2$$

(7) $$= \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\,\frac{m}{M} \ .$$

Da nun $m \ll M$, vereinfacht sich die Gleichung zu

(8) $$A = \frac{3}{2}mv^2 = \Delta E_1 \ .$$

b) *Bezugssystem Auto B*

Impulssatz: Für den Beobachter in B hat die Straße vor dem Beschleunigungsvorgang die Geschwindigkeit $-v$.

(9) $$-Mv = mv + Mu \ .$$

Daraus folgt:

(10) $$u = -v\,\frac{M+m}{M} \ .$$

Energiesatz:

(11) $$A = \frac{M}{2}u^2 + \frac{m}{2}v^2 - \frac{M}{2}v^2$$

(12) $$= \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}(u^2 - v^2) \ .$$

Setzt man nun (10) ein, erhält man:

(13) $$A = \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}\left(v^2\,\frac{M^2+2mM+m^2}{M^2} - v^2\right)$$

(14) $$= \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}v^2\left(1 + \frac{2m}{M} + \frac{m^2}{M^2} - 1\right)$$

(15) $$\approx \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}v^2\,\frac{2m}{M}$$

(16) $$= \frac{m}{2}v^2 + mv^2$$

(17) $$= \frac{3}{2}mv^2 = \Delta E_1 \ .$$

Der Energieübertrag auf die Erde ist in diesem System also nicht vernachlässigbar. Dadurch erhält man das gleiche Ergebnis wie im ruhenden System.

Der vermeintliche Widerspruch in der Aufgabenstellung entsteht durch Anwendung des Energiesatzes auf ein nicht abgeschlossenes System.